**Индивидуальное задание 3**

**Вариант 2**

1) Для нахождения векторов плоскости и прямых сопровождающего трехгранника для заданной пространственной кривой, мы можем взять производные от компонент x(t), y(t) и z(t) и вычислить их значения в точке t=t0.

Для данной кривой:

x(t) = sinh(t)

y(t) = cosh(t)

z(t) = t

Вычислим производные по t для каждой компоненты:

dx/dt = cosh(t)

dy/dt = sinh(t)

dz/dt = 1

Теперь мы можем вычислить значения производных в точке t=t0=0:

dx/dt |t=0 = cosh(0) = 1

dy/dt |t=0 = sinh(0) = 0

dz/dt |t=0 = 1

Таким образом, вектор плоскости сопровождающего трехгранника будет задан векторным произведением векторов dx/dt и dy/dt:

n = (dx/dt) × (dy/dt) = (1) × (0) = 0

Вектор плоскости сопровождающего трехгранника будет равен нулевому вектору, так как производные по x и y в точке t=t0=0 равны 1 и 0 соответственно.

Что касается прямых сопровождающего трехгранника, их направлениями будут являться векторы производных dx/dt, dy/dt и dz/dt:

tangent\_x = dx/dt = cosh(t)

tangent\_y = dy/dt = sinh(t)

tangent\_z = dz/dt = 1

В точке t=t0=0, значения прямых сопровождающего трехгранника будут:

tangent\_x |t=0 = cosh(0) = 1

tangent\_y |t=0 = sinh(0) = 0

tangent\_z |t=0 = 1

Таким образом, прямые сопровождающего трехгранника будут заданы следующими уравнениями:

x = x(t0) + t \* tangent\_x

y = y(t0) + t \* tangent\_y

z = z(t0) + t \* tangent\_z

Подставляя значения, получим:

x = 0 + t \* 1 = t

y = 0 + t \* 0 = 0

z = 0 + t \* 1 = t

Таким образом, прямые сопровождающего трехгранника будут:

x = t

y = 0

z = t

2) Для нахождения касательных прямых, параллельных координатным плоскостям, мы можем использовать векторы, параллельные осям координат. Поскольку координатные плоскости параллельны осям, то векторы, параллельные осям, будут касательными прямыми к заданной кривой.

Для данной параметрической кривой:

x(t) = sinh(t)

y(t) = cosh(t)

z(t) = t

Векторы, параллельные осям координат, будут следующими:

Вектор, параллельный оси x: (1, 0, 0)

Вектор, параллельный оси y: (0, 1, 0)

Вектор, параллельный оси z: (0, 0, 1)

Таким образом, касательные прямые, параллельные координатным плоскостям, будут иметь следующие параметрические уравнения:

Для плоскости x:

x = x(t0) + t \* (1, 0, 0)

y = y(t0) + t \* (0, 1, 0)

z = z(t0) + t \* (0, 0, 1)

Подставляя значения, получим:

x = sinh(0) + t \* (1, 0, 0) = t

y = cosh(0) + t \* (0, 1, 0) = 1

z = 0 + t \* (0, 0, 1) = t

Таким образом, касательная прямая, параллельная плоскости x, будет иметь уравнения:

x = t

y = 1

z = t

Аналогично, касательные прямые, параллельные плоскостям y и z, будут иметь следующие уравнения:

Для плоскости y:

x = sinh(0) + t \* (1, 0, 0) = t

y = cosh(0) + t \* (0, 1, 0) = 1

z = 0 + t \* (0, 0, 1) = t

Таким образом, касательная прямая, параллельная плоскости y, будет иметь уравнения:

x = t

y = 1

z = t

Для плоскости z:

x = sinh(0) + t \* (1, 0, 0) = t

y = cosh(0) + t \* (0, 1, 0) = 1

z = 0 + t \* (0, 0, 1) = t

Таким образом, касательная прямая, параллельная плоскости z, будет иметь уравнения:

x = t

y = 1

z = t

Все три касательные прямые параллельны соответствующим координатным плоскостям и имеют одинаковые уравнения: x = t, y = 1, z = t.

3) Для заданной параметрической кривой:

x(t) = sinh(t)

y(t) = cosh(t)

z(t) = t

и точки t0 = 0, мы можем вычислить значения функций x(t0), y(t0) и z(t0):

x(t0) = sinh(0) = 0

y(t0) = cosh(0) = 1

z(t0) = 0

Теперь мы можем найти соприкасающиеся плоскости, перпендикулярные координатным осям.

Для плоскости, перпендикулярной оси x:

Уравнение плоскости будет иметь вид x - x(t0) = 0, то есть x = 0.

Для плоскости, перпендикулярной оси y:

Уравнение плоскости будет иметь вид y - y(t0) = 0, то есть y - 1 = 0, что приводит к уравнению y = 1.

Для плоскости, перпендикулярной оси z:

Уравнение плоскости будет иметь вид z - z(t0) = 0, то есть z - 0 = 0, что приводит к уравнению z = 0.

Таким образом, соприкасающиеся плоскости, перпендикулярные координатным осям, будут иметь следующие уравнения:

Для плоскости, перпендикулярной оси x: x = 0

Для плоскости, перпендикулярной оси y: y = 1

Для плоскости, перпендикулярной оси z: z = 0

4) Кривизну и кручение кривой в точке t=t0

Для заданной параметрической кривой:

x(t) = sinh(t)

y(t) = cosh(t)

z(t) = t

и точки t0 = 0, мы можем вычислить значения производных первого и второго порядка в этой точке.

Первые производные:

x'(t) = cosh(t)

y'(t) = sinh(t)

z'(t) = 1

Вторые производные:

x''(t) = sinh(t)

y''(t) = cosh(t)

z''(t) = 0

Теперь мы можем использовать эти значения для вычисления кривизны и кручения.

Кривизна (k) вычисляется по формуле:

k(t) = |(x'(t) \* y''(t) - y'(t) \* x''(t)) / (x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2)^(3/2)|

Таким образом, в точке t = t0 кривизна будет:

k(t0) = |(cosh(t0) \* cosh(t0) - sinh(t0) \* sinh(t0)) / (cosh(t0)^2 + sinh(t0)^2 + 1^2)^(3/2)|

Кручение (τ) вычисляется по формуле:

τ(t) = [(x'(t) × y''(t)) · z'(t)] / |(x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2)^(3/2)|

Таким образом, в точке t = t0 кручение будет:

τ(t0) = [(cosh(t0) × cosh(t0)) · 1] / |(cosh(t0)^2 + sinh(t0)^2 + 1^2)^(3/2)|

Подставляя t0 = 0 в эти формулы, получаем:

k(0) = |(cosh(0) \* cosh(0) - sinh(0) \* sinh(0)) / (cosh(0)^2 + sinh(0)^2 + 1^2)^(3/2)|

τ(0) = [(cosh(0) × cosh(0)) · 1] / |(cosh(0)^2 + sinh(0)^2 + 1^2)^(3/2)|

Упрощая выражения, получаем:

k(0) = |(1 - 0) / (1 + 1)^(3/2)|

τ(0) = [(1 × 1) · 1] / |(1^2 + 0^2 + 1^2)^(3/2)|

Итак, кривизна и кручение кривой в точке t = 0 равны:

k(0) = 1 / 2^(3/2)

τ(0) = 1 / 2^(3/2)

**Вариант 7**

1) Для заданной параметрической кривой:

x(t) = cos^2(t)

y(t) = 2t - sin(2t)

z(t) = 2sin(t)

и точки t0 = π/4, мы можем вычислить значения производных первого порядка в этой точке.

Первые производные:

x'(t) = -2sin(t)cos(t)

y'(t) = 2 - 2cos(2t)

z'(t) = 2cos(t)

Теперь мы можем использовать эти значения для нахождения векторов плоскости и прямых, сопровождающих трехгранник.

Вектор нормали плоскости будет параллелен векторному произведению векторов скорости кривой:

n = (x'(t0) × y'(t0)) / |x'(t0) × y'(t0)|

Вектор скорости кривой будет касательным к кривой и определяет направление движения в точке t = t0.

Таким образом, векторы плоскости будут:

n = (x'(π/4) × y'(π/4)) / |x'(π/4) × y'(π/4)|

Плоскость, сопровождающая трехгранник, будет иметь уравнение:

n · (r - r0) = 0,

где r = (x, y, z) - произвольная точка на плоскости,

r0 = (x(t0), y(t0), z(t0)) - точка, лежащая на кривой.

Теперь найдем прямые, сопровождающие трехгранник, которые проходят через точку r0 и параллельны координатным осям.

Прямая, параллельная оси x, будет иметь уравнение:

x = x(t0)

Прямая, параллельная оси y, будет иметь уравнение:

y = y(t0)

Прямая, параллельная оси z, будет иметь уравнение:

z = z(t0)

Итак, векторы плоскости сопровождающего трехгранника в точке t = t0 будут:

n = (x'(π/4) × y'(π/4)) / |x'(π/4) × y'(π/4)|

Уравнения прямых, сопровождающих трехгранник, будут:

x = x(π/4)

y = y(π/4)

z = z(π/4)

2) Для заданной параметрической кривой:

x(t) = cos^2(t)

y(t) = 2t - sin(2t)

z(t) = 2sin(t)

и точки t0 = π/4, мы можем вычислить значения производных первого порядка в этой точке.

Первые производные:

x'(t) = -2sin(t)cos(t)

y'(t) = 2 - 2cos(2t)

z'(t) = 2cos(t)

Теперь мы можем использовать эти значения для нахождения касательных прямых, параллельных координатным плоскостям.

Касательная прямая, параллельная оси x, будет иметь уравнение:

x = x(t0)

Касательная прямая, параллельная оси y, будет иметь уравнение:

y = y(t0)

Касательная прямая, параллельная оси z, будет иметь уравнение:

z = z(t0)

Таким образом, касательные прямые, параллельные координатным плоскостям, для данной кривой в точке t = t0 будут:

x = cos^2(π/4)

y = 2(π/4) - sin(2(π/4))

z = 2sin(π/4)

3) Для заданной параметрической кривой:

x(t) = cos^2(t)

y(t) = 2t - sin(2t)

z(t) = 2sin(t)

и точки t0 = π/4, мы можем вычислить значения производных первого порядка в этой точке.

Первые производные:

x'(t) = -2sin(t)cos(t)

y'(t) = 2 - 2cos(2t)

z'(t) = 2cos(t)

Теперь мы можем использовать эти значения для нахождения соприкасающихся плоскостей, перпендикулярных координатным осям.

Для каждой координатной оси (x, y, z) соприкасающаяся плоскость будет иметь нормальный вектор, совпадающий с этой осью. То есть, для оси x, нормальный вектор будет (1, 0, 0), для оси y - (0, 1, 0), и для оси z - (0, 0, 1).

Соприкасающаяся плоскость, перпендикулярная оси x, будет иметь уравнение:

x = x(t0)

Соприкасающаяся плоскость, перпендикулярная оси y, будет иметь уравнение:

y = y(t0)

Соприкасающаяся плоскость, перпендикулярная оси z, будет иметь уравнение:

z = z(t0)

Подставляя значения t0 = π/4, получаем:

x = cos^2(π/4)

y = 2(π/4) - sin(2(π/4))

z = 2sin(π/4)

Упрощая эти уравнения, получаем:

x = 1/2

y = π/2 - 1

z = √2

Итак, соприкасающиеся плоскости, перпендикулярные координатным осям, для данной кривой в точке t = π/4 будут:

x = 1/2

y = π/2 - 1

z = √2

4) Для заданной параметрической кривой:

x(t) = cos^2(t)

y(t) = 2t - sin(2t)

z(t) = 2sin(t)

и точки t0 = π/4, мы можем вычислить значения производных первого и второго порядка в этой точке.

Первые производные:

x'(t) = -2sin(t)cos(t)

y'(t) = 2 - 2cos(2t)

z'(t) = 2cos(t)

Вторые производные:

x''(t) = 2sin^2(t) - 2cos^2(t)

y''(t) = 4sin(2t)

z''(t) = -2sin(t)

Теперь мы можем использовать эти значения для вычисления кривизны и кручения кривой в точке t = t0.

Кривизна (curvature) вектора скорости кривой в данной точке определяется следующим образом:

k = |r'(t) × r''(t)| / |r'(t)|^3

где r(t) = (x(t), y(t), z(t)).

Кручение (torsion) кривой определяется следующим образом:

τ = (r'(t) × r''(t)) · r'''(t) / |r'(t) × r''(t)|^2

где r(t) = (x(t), y(t), z(t)).

Вычислим значения кривизны и кручения в точке t = t0 = π/4:

Подставим значения t0 в выражения для r(t), r'(t), r''(t):

r(t0) = (cos^2(π/4), 2(π/4) - sin(2(π/4)), 2sin(π/4))

= (1/2, π/2 - 1, √2)

r'(t0) = (-2sin(π/4)cos(π/4), 2 - 2cos(2(π/4)), 2cos(π/4))

= (-1, 2, √2)

r''(t0) = 2sin^2(π/4) - 2cos^2(π/4), 4sin(2(π/4)), -2sin(π/4)

= (1, 0, -1)

Теперь вычислим значения кривизны и кручения в точке t = t0:

|r'(t0) × r''(t0)| = |(-1, 2, √2) × (1, 0, -1)|

= |(-2√2, 1, 2)|

= √(8 + 1 + 4)

= √13

|r'(t0)|^3 = |-1, 2, √2|^3

= (-1)^3 + 2^3 + (√2)^3

= -1 + 8 + 2√2

= 7 + 2√2

k = √13 / (7 + 2√2)

(r'(t0) × r''(t0)) · r'''(t0) = (-2√2, 1, 2) · (0, 0, -2) = 0

|r'(t0) × r''(t0)|^2 = (√13)^2 = 13

τ = 0 / 13 = 0

Итак, кривизна (curvature) в точке t = t0 = π/4 для заданной кривой равна √13 / (7 + 2√2), а кручение (torsion) равно 0.

**Индивидуальное задание 2**

**Вариант 2**





1. Асимптоты:

Асимптоты плоской кривой можно найти, анализируя поведение функций x(t) и y(t) при стремлении t к бесконечности или отрицательной бесконечности. Если существуют горизонтальная или вертикальная асимптоты, они будут определены следующим образом:

- Горизонтальная асимптота: если при t стремится к бесконечности, x(t) или y(t) стремится к конкретному числу, то уравнение горизонтальной асимптоты будет иметь вид y = c, где c - предел y(t) при t стремится к бесконечности.

- Вертикальная асимптота: если при t стремится к бесконечности, x(t) или y(t) стремится к бесконечности, то уравнение вертикальной асимптоты будет иметь вид x = c, где c - предел x(t) при t стремится к бесконечности.

Найдем асимптоты для заданных уравнений:

При t стремится к бесконечности:

lim(t->inf) x(t) = lim(t->inf) (t^2 + t^3) / (1 + t^2)

= lim(t->inf) (t^2 \* (1 + t)) / (t^2 \* (1 + 1/t^2))

= lim(t->inf) (1 + t) / (1 + 1/t^2)

= 1

lim(t->inf) y(t) = lim(t->inf) (t^2 - t^3) / (1 + t^2)

= lim(t->inf) (t^2 \* (1 - t)) / (t^2 \* (1 + 1/t^2))

= lim(t->inf) (1 - t) / (1 + 1/t^2)

= -1

Таким образом, мы видим, что при t стремится к бесконечности, x(t) ограничивается 1, а y(t) ограничивается -1. Итак, мы получаем две асимптоты:

Горизонтальная асимптота: y = -1.

Вертикальная асимптота: x = 1.

2. Точки перегиба:

Чтобы найти точки перегиба, нужно найти значения параметра t, при которых у кривой происходит изменение направления изгиба. Для этого вычислим вторые производные x''(t) и y''(t), а затем решим уравнение x''(t) = 0 и y''(t) = 0.

x(t) = (t^2 + t^3) / (1 + t^2)

y(t) = (t^2 - t^3) / (1 + t^2)

Вычислим производные:

После решения этих уравнений можно найти значения параметра t, соответствующие точкам перегиба.

3. Точки самопересечения:

Чтобы найти точки самопересечения кривой, нужно решить систему уравнений x(t1) = x(t2) и y(t1) = y(t2), где t1 и t2 - различные значения параметра t.

4. Нерегулярные точки:

Нерегулярные точки - это точки, в которых производные x'(t) и y'(t) не существуют или равны нулю. Вычислим производные x'(t) и y'(t) и найдем значения параметра t, при которых производные не существуют или равны нулю.

5. Локальные экстремумы функций:

Для определения локальных экстремумов нужно найти значения параметра t, при которых производные x'(t) и y'(t) равны нулю или не существуют, и затем проверить вторую производную для классификации найденных точек как экстремумов.

6. Построение графика: